

TALLER No.1

Tema: **Principio Fundamental del Conteo**

FECHA: _____

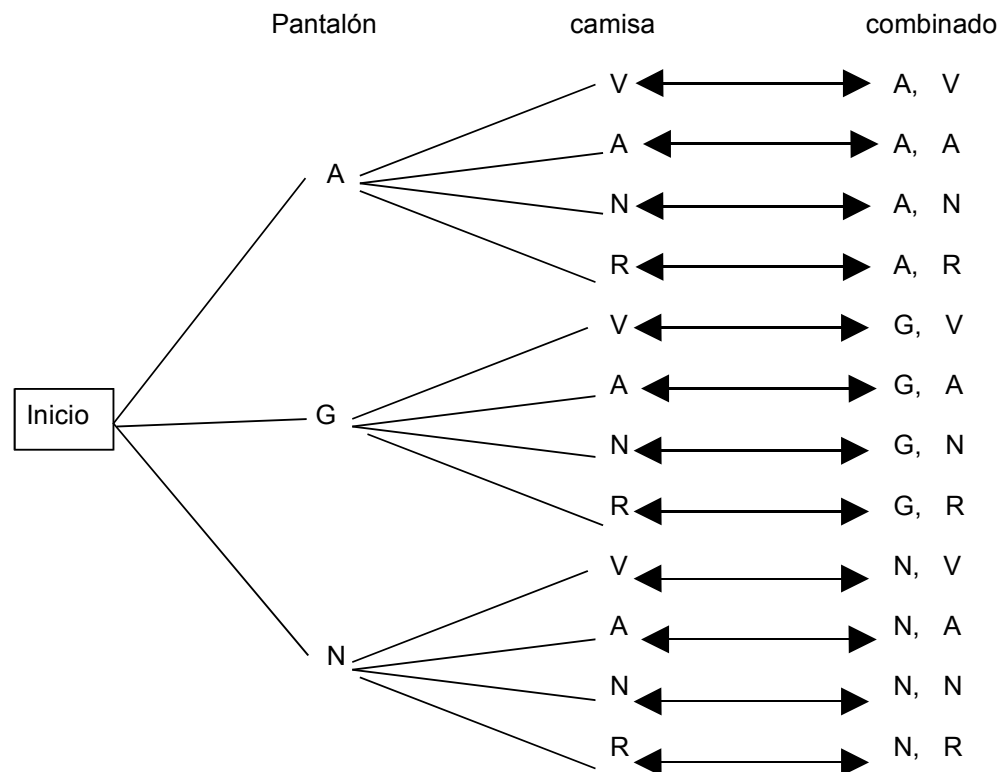
Contar objetos, contar palabras, contar grupos, ... Contar a veces es muy fácil, como cuando contamos huevos mientras los acomodamos en cartones de a 30. No es tan fácil cuando queremos contar en un teatro con 2.000 personas, las manos levantadas que aprueban cierta propuesta y es todavía más confuso cuando queremos contar todas las posibles formas de extraer 3 nombres de una urna con 25 nombres o contar los números de 3 cifras que se pueden formar tomando los dígitos del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ sin repetir ningún dígito.

Piensa en el siguiente caso como ejemplo: Te compras un pantalón azul, otro gris y otro negro, y cuatro camisetas: una verde, una azul, una negra y una roja.

¿De cuántas maneras diferentes te puedes vestir con los pantalones y las camisetas que compraste?

Es fácil ver que con cada uno de los pantalones puedes usar 4 camisetas y como son tres pantalones, el total es $3 \cdot 4 = 12$ pintas diferentes.

*Estos casos de conteo y otros similares pueden representarse mediante un gráfico llamado **Diagrama de árbol**, como aparece enseguida. También se puede hacer directamente la lista de combinados de la derecha cuidando el orden para que no se quede ninguno sin incluir.*



El llamado **Principio Fundamental del Conteo**, dice que: “*siempre que un evento A se puede hacer de n maneras diferentes y otro evento B de m formas diferentes, entonces el número de formas diferentes de realizar los dos eventos es igual al producto $n \cdot m$* ”

En nuestro ejemplo anterior, el evento A es “elegir el pantalón”, y hay 3 formas de hacerlo; el evento B es “elegir la camiseta” y para este hay 4 formas de hacerlo. De modo que el número de formas diferentes de elegir el pantalón y la camiseta es $3 \cdot 4$, que corresponde con nuestro resultado.

1. Si en el ejemplo anterior agregas los zapatos para distinguir la pinta que elegirás y tienes dos pares unos negros y otros cafés. ¿Cuántos combinados diferentes te resultarán ahora?

Aplica el principio del conteo para resolver los problemas siguientes:

2. Para ir de Bogotá a Cali por tierra se puede elegir entre 5 rutas distintas. Para ir de Cali a Buenaventura se puede elegir entre 3 rutas diferentes. ¿Cuántas rutas diferentes se pueden tomar para ir desde Bogotá hasta Buenaventura por carretera?

3. Una compañía de aviación ofrece vuelos entre 16 ciudades extranjeras y Bogotá y entre Bogotá y 9 ciudades colombianas. ¿Cuántos planes de vuelo entre una ciudad extranjera y una ciudad colombiana diferente de Bogotá, que incluyan parada en Bogotá, puede ofrecer esa compañía?

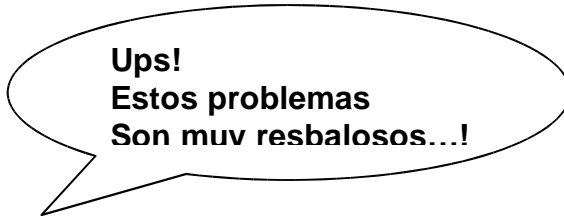
4. Para preparar un aderezo para ensalada un chef de cocina debe elegir un condimento en polvo, un tipo de aceite y un tipo de vinagre. Si tiene 4 condimentos en polvo, 3 tipos de aceite y 5 tipos de vinagre, ¿Cuántos aderezos diferentes puede preparar?

TALLER No.2

Tema: **Contar ordenaciones de objetos**

FECHA: _____

En estos talleres se nombran fichas, colores y otras cosas. Puedes trabajar realmente con esas cosas o imaginártelas. Lo importante es que contestes bien y que estés muy seguro de tus respuestas.



1. Toma tres fichas de diferentes colores y ordénalas en una fila de izquierda a derecha. Escribe los colores en el orden que les diste:

Ordena las mismas fichas de otra manera y escribe el nuevo orden de los colores:

Escribe todas las formas diferentes en que puedes ordenar tus tres fichas.

¿Cuántas ordenaciones diferentes pudiste hacer? _____

2. Repite el ejercicio anterior con cuatro fichas de diferentes colores.

TALLER No.3

Tema: **Permutaciones**

FECHA: _____

Si se tiene un grupo ordenado de cosas y se cambia el orden de al menos dos de esas cosas, sin añadir ni quitar ninguna, se dice que se ha hecho una permutación.

Por ejemplo, las palabras escritas MORA , RAMO, AMOR, se obtienen por permutaciones diferentes de las letras que forman la palabra ROMA.

1. Escribe todas las permutaciones posibles de las letras que forman la palabra ROMA

¿Cuántas permutaciones te resultaron? _____

2. Compara con los resultados de los ejercicios 2 y 3 del taller anterior. Debe resultar en todos los casos el mismo número.

3. Para que te acostumbres a escribir las permutaciones de manera que te sea fácil encontrarlas todas, vamos a hacer el ejercicio de escribir todas las permutaciones de las letras A,B,C,D, así:

La regla es: *Tratar de conservar el orden natural siempre que se pueda.*

Comienzas con todas las que empiezan por A, sigues con las que empiezan por B, y sucesivamente hasta terminar. Te doy como ejemplo las que empiezan por A.

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, _____

(observa cómo cada cambio conserva el orden en donde se puede). Escribe las demás en los renglones que siguen:

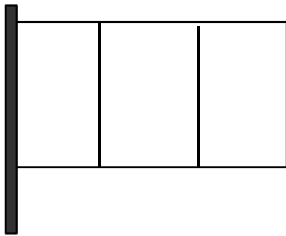
Cómo calcular el número de permutaciones.

Supongamos que son 5 las cosas diferentes que queremos ordenar y permutar. Entonces se deben llenar 5 lugares en cada una de las permutaciones. Podemos pensar de esta forma: El primer lugar se puede llenar de 5 maneras diferentes, el segundo lugar de 4 (porque ya hay una fija en el primer lugar), el tercer lugar de 3, el cuarto de 2 y el último lugar de 1. Por tanto el total de permutaciones será:

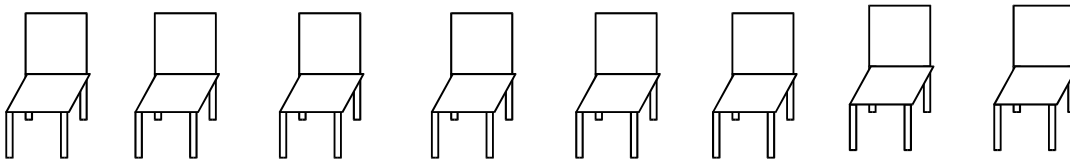
Permutaciones de 5 objetos diferentes y ordenados: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

4. Siguiendo el orden establecido en el ejercicio número 3, escribe por el reverso de la página todos los números de 5 cifras que se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5, sin repetir dígitos. Deben salirte 120 números.

5. Dibuja todas las banderas de tres bandas verticales que se puedan hacer usando en cada banda uno de los colores azul, verde o rojo, sin repetir color.



6. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 8 personas en una fila de 8 asientos?



TALLER No.4

Tema: **El Factorial**

FECHA: _____

El producto de un número entero positivo n por los enteros positivos menores que él, se llama **el factorial de n** , y se escribe $n!$.

Entonces, si revisas el taller anterior, verás que **cinco factorial** es **120**, pues se obtuvo multiplicando $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, que es lo que se llama el factorial.

Entonces, podemos calcular los primeros factoriales:

$$\begin{array}{lll} 1! = & 1 & 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24} & 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{5.040} \\ 2! = 2 \cdot 1 = & \mathbf{2} & 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120} & 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{40.320} \\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = & \mathbf{6} & 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720} & 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{362.880} \end{array}$$

Por cuestiones de conveniencia matemática, se asigna el valor 1 para el factorial de cero. $0! = 1$

Propiedad fundamental del factorial: Basta que observes la lista de factoriales que tenemos para que te des cuenta de que el factorial de un número es el producto de ese número por el factorial de número anterior. Así, se pueden generar también los factoriales diciendo:

$$\begin{array}{llll} 0! = 1; & 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = & 720 \\ 1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = & 1 & 7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = & 5.040 \\ 2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = & 2 & 8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5.040 = & 40.320 \\ 3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = & 6 & 9! = 9 \cdot 8! = 9 \cdot 40.320 = & 362.880 \\ 4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = & 24 & 10! = 10 \cdot 9! = 10 \cdot 362.880 = & 3'628.800 \\ 5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = & 120 & 11! = 11 \cdot 10! = 11 \cdot 3'628.800 = & 39'916.800 \end{array}$$

En términos generales esta propiedad se escribe así: $n! = n \cdot (n-1)!$

1. Calcula en otra hoja los factoriales que siguen hasta llegar a $20!$ y escríbelos a continuación.

$$12! = \underline{\hspace{10em}} \quad 13! = \underline{\hspace{10em}}$$

$$14! = \underline{\hspace{10em}} \quad 15! = \underline{\hspace{10em}}$$

$$16! = \underline{\hspace{10em}} \quad 17! = \underline{\hspace{10em}}$$

$$18! = \underline{\hspace{10em}} \quad 19! = \underline{\hspace{10em}}$$

$$20! = \underline{\hspace{10em}}$$

2. Piensa bien y simplifica las siguientes fracciones; luego comprueba que quedaron bien simplificadas. (No hagas divisiones con calculadora). Haz todas las operaciones en los espacios en blanco para que puedas revisarlas.

$$\frac{5!}{4!} =$$

$$\frac{5!}{35} =$$

$$\frac{7 \times 6!}{8!} =$$

$$\frac{10! \times 5!}{7! \times 6!} =$$

3. Corrige las igualdades que estén equivocadas y marca con una B las que están bien.

$$2! + 3! = 5!$$

$$5 + 4! = 5!$$

$$7! = 42 \times 5!$$

$$2! \times 2! = 4!$$

$$\frac{10!}{8!} = 90$$

$$\frac{15!}{3!} = 5!$$

$$\frac{7 \times 4!}{14} = 2!$$

$$3 \times 7! = 21!$$

Revisa el taller anterior. Podrás ver con facilidad que el número de permutaciones de n objetos diferentes es $n!$. Con esta fórmula que es muy fácil de recordar, resuelve los problemas siguientes:

4. De cuántas maneras se pueden ordenar 10 colores en una fila?

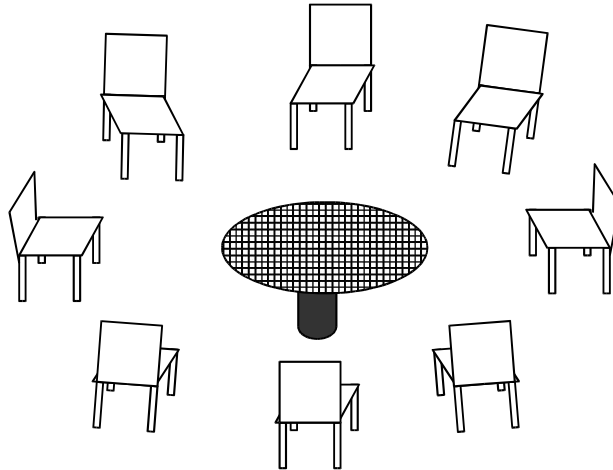
5. Si en el arco iris pudieramos cambiar el orden de los colores, ¿Cuántos arcos iris diferentes se podrían lograr?

TALLER No.5

Tema: **Otras Permutaciones**

FECHA: _____

Piensa en lo siguiente: 8 personas se van a sentar en 8 sillas alrededor de una mesa redonda. ¿De cuántas maneras diferentes pueden acomodarse, considerando que ningún puesto se distingue de otro?



Cuando las sillas están en fila, se sabe claramente cuáles son los extremos, y a partir de ellos se identifican los puestos. Si las sillas están en círculo, no hay extremos.

Si en la mesa redonda no existe una silla especial que sirva para identificar el puesto en donde se comienza el orden, es necesario que una persona elija primero su silla, que servirá para identificar los demás puestos, así quedan 7 lugares para las otras 7 personas y éstos son los que pueden permutarse.

Entonces, el número de permutaciones de 8 cosas que forman un círculo es $7!$

En general: Si n cosas se ordenan formando una circunferencia, el número de permutaciones posibles es $(n-1)!$

1. Doce niños de un jardín infantil se toman de las manos para jugar al reloj formando una circunferencia. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar distribuidos?

2. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las letras de la palabra MURCIELAGO a espacios iguales por el borde de un círculo?

3. Ahora piensa en este problema: ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra ORLANDO?

... Si todas las letras fueran diferentes pues serían las permutaciones de 7 objetos, pero como aparece dos veces la letra O, todas quedarán repetidas. Por tanto, es necesario que dividamos el número total de permutaciones de 7 objetos por todas las permutaciones de las 2 letras O, que aparecen: Luego:

$$\text{Número de permutaciones de 7 letras si 2 de ellas son idénticas} = \frac{7!}{2!} = 2.520$$

4. La situación se complica si se trata de encontrar todas las ordenaciones posibles de las letras de la palabra MARGARITA, porque en ella se repite 3 veces la A y 2 veces la R. Sin embargo basta pensar que las permutaciones se repiten 3! veces por cuenta de la A y 2! veces por cuenta de R. Por tanto, el número de permutaciones diferentes será:

$$\begin{aligned} \text{Número de permutaciones de 9 letras si 3 son idénticas entre sí y 2 son idénticas entre sí} \\ = \frac{9!}{3! \times 2!} = 30.240 \end{aligned}$$

5. Un niño tiene 4 fichas de igual forma y tamaño, 2 son rojas y 2 son azules. ¿De cuántas maneras diferentes puede ordenar sus 4 fichas en una fila? Comprueba dibujando todas las posibilidades.

6. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila 7 fichas de igual forma y tamaño, sabiendo que 4 son amarillas y 3 son verdes?

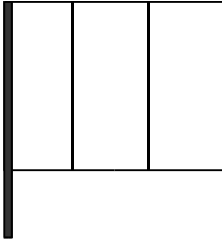
7. ¿Cuántos arreglos diferentes de 16 letras puedes conformar con las letras de la palabra UNIVERSALIZACION?

TALLER No.6

Tema: **Permutaciones de algunos objetos
Tomados de un conjunto más numeroso**

FECHA: _____

Pensemos en el siguiente problema:



Se tienen telas de los colores amarillo, blanco, celeste, morado, negro, rojo y verde (*cada tela de un solo color*), para formar banderas de tres franjas verticales de distintos colores.

Sabiendo que si cambia el orden de las franjas, cambia la bandera, ¿cuántas banderas diferentes se pueden formar con esas telas?

Se trata de elegir los colores, en orden:

- I. El color para la primera franja se puede elegir de 7 maneras diferentes.
- II. Para la franja siguiente quedan 6 colores posibles pues no se puede repetir el primero.
- III. Para la última franja quedan 5 colores entre los cuales elegir.

De esta manera, aplicando el principio fundamental del conteo, las 3 franjas se pueden llenar de $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ formas distintas.

Por tanto, con los 7 colores se pueden hacer 210 banderas de tres franjas verticales de distintos colores. Decimos que:

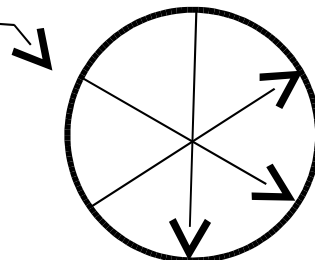
“Hay 210 permutaciones de 7 elementos tomados de a 3”.

Problemas:

1. Luis hace terrarios en pequeños frascos, cada uno con 5 tierras de diferentes colores, colocadas por capas, sin repetir color de tierra. ¿Cuántos terrarios distintos puede realizar si tiene tierras de 8 colores diferentes?

2. Una señora tiene para preparar una ensalada de colores los siguientes elementos: repollo verde, remolacha, zanahoria, tomate rojo, coliflor, pimentón amarillo y aceitunas negras. Quiere diseñar una de 6 colores que va a distribuir en forma de cuñas en una bandeja redonda, cada cuña de un color.

¿Cuántas ensaladas distintas puede diseñar con los ingredientes que tiene?



Vamos al caso del lenguaje:

Inventemos el término **palabro** para nombrar un grupo ordenado de n letras distintas del alfabeto español. Este alfabeto está formado por 27 letras a saber: A,B,C,D,E,F,G, H,I,J,K,L,M,N,Ñ,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z.
 Por ejemplo: ABEC, BIMN, XUWZ, CABE, IMBN, son 5 palabros diferentes de 4 letras.

¿cuántos palabros de 5 letras se pueden formar?.

Seguimos los mismos pasos que en el caso de las banderas:

- a. Posibilidades para la primera letra = 27
- b. Posibilidades que quedan para la segunda letra = 26
- c. Posibilidades que quedan para la tercera letra = 25
- d. Posibilidades para la cuarta letra = 24
- e. Posibilidades para la quinta letra = 23

Por el principio fundamental del conteo, tenemos que:

Total de palabros de 5 letras = $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 9'687.600$. Decimos entonces que:
 “ Hay 9'687.600 permutaciones de 27 elementos tomados de a 5 ”.

Se pueden formar casi diez millones de grupos ordenados de 5 letras diferentes, entre los cuales están todas las palabras de 5 letras distintas del idioma español.

3. Escribe todos los palabros que se pueden formar con las letras A,O,M,R.

—

4. ¿Qué porcentaje de los anteriores palabros, son verdaderas palabras del idioma español?

5. ¿Cuántos palabros de 4 letras del alfabeto español se pueden formar?

6. Si para todos los casos, el porcentaje de palabras fuera el mismo que el que encontraste en el problema 5, ¿Cuántas palabras de 4 letras distintas tendría el idioma español?

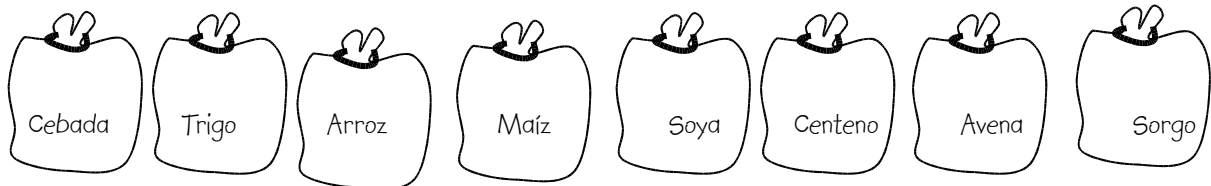
TALLER No.7

Tema: **Combinaciones**

FECHA: _____

En muchos casos de extracción de algunos elementos de un conjunto, NO tiene importancia el orden en el cual se tomen esos elementos. Estos casos se llaman **Combinaciones**.

Por ejemplo, cuando una persona quiere preparar una harina moliendo y revolviendo 4 clases de granos por partes iguales y dispone de 8 clases de granos, da lo mismo si toma avena, arroz, trigo y cebada en este orden o en otro.



Esa persona desea saber cuántas harinas distintas de 4 granos puede preparar con sus 8 granos.

Lo pensamos así:

Si al cambiar el orden en que se toman los granos cambiara la harina resultante, tendríamos el caso del taller anterior de *permutaciones de 4 elementos tomados de un conjunto de 8 elementos* y saldrían: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$ harinas.

Pero en esas 1.680 harinas se repiten $4! = 24$ de cada clase, que son las que corresponden a *las permutaciones de los 4 elementos* que forman cada harina, de modo que en realidad, el total de harinas diferentes es igual a $1.680 / 24 = 70$

Hemos encontrado una forma para calcular las **combinaciones de 4 elementos tomados de un conjunto de 8 elementos**.

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, resuelve los siguientes problemas:

1. Si en una bolsa hay 12 bolas de colores diferentes, ¿De cuántas formas se pueden escoger 3, sabiendo que no importa el orden?
2. Si en un grupo de 6 amigos se deben elegir 3 para un trabajo. ¿De cuántas formas se puede constituir ese grupo?

3. Si se tienen 10 cartas diferentes de una baraja y se eligen 4 ¿De cuántas formas se puede hacer esa elección?

4. Si hay 55 cuentos en un concurso y se van a premiar solo 2, ¿De cuántas maneras diferentes se pueden escoger?

5. María y Paola recogieron una rosa, un clavel, una margarita, una orquídea y un jazmín y van a hacer un ramo de 3 flores para su profesora. Escribe todas las formas en que pueden escoger las flores para armar el ramo.

6. El club de deportes de un colegio tiene 6 equipos diferentes: fútbol, baloncesto, voleibol, natación, atletismo, patinaje. Es necesario elegir 3 de esos equipos para representar al colegio en un desfile. ¿De cuántas formas pueden ser elegidos los que irán al desfile?

7. Siete amigos van a la playa. Cinco entran al mar y dos se quedan cuidando las cosas. Hacen turnos de media hora de tal manera que agotan todas las posibles combinaciones para los grupos. ¿Cuántos turnos hacen? ¿Cuánto tiempo pasan en la playa?

8. Para una rifa se han vendido 138 puestos a diferentes personas y hay premios iguales para cinco ganadores. ¿De cuántas maneras distintas puede conformarse el grupo de ganadores?

TALLER No.8

Tema: **Combinaciones**

FECHA: _____

Sigue el razonamiento del siguiente caso:

Un grupo está formado por 12 hombres y 10 mujeres y se desea constituir una comisión de trabajo formada por 5 hombres y 4 mujeres.

¿De cuántas formas posibles puede elegirse esa comisión?

Es una situación clara en la cual se puede aplicar el principio fundamental del conteo, encontrando separadamente el número de formas de elegir los hombres y el número de formas de elegir las mujeres y multiplicando estos dos números para saber el total de posibilidades para la conformación de la comisión.

a. Número de formas de elegir 5 hombres entre 12 = **Combinaciones de 12 elementos tomados de a 5** = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 / 5! = 95040 / 120 = 792$

b. Número de formas de elegir 4 mujeres entre 10 = **Combinaciones de 10 elementos tomados de a 4** = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 4! = 5.040 / 24 = 210$

c. Número total de comisiones posibles: $792 \cdot 210 = 166.320$

Aplica el método anterior para resolver los siguientes problemas:

1. Para las elecciones del Gobierno Escolar se designa una comisión formada por 3 miembros de cada grupo. El grupo A tiene 7 miembros, el grupo B tiene 10 y el grupo C tiene 9. ¿Cuántas formas posibles existen para elegir esa comisión?

2. Los equipos deportivos de un colegio están formados así:

Equipo de fútbol: 20 integrantes

Equipo de baloncesto: 17 integrantes

Equipo de patinaje: 12 integrantes.

Se eligen 2 miembros de cada grupo para representar al colegio.

¿De cuántas formas posibles puede hacerse la elección?

3. Para elegir la Junta Directiva de una sociedad de 12 miembros se elige primero el presidente y después 5 personas que forman el equipo. De cuántas maneras diferentes puede quedar constituida esa Junta?

4. En una caja hay 24 tarjetas negras y 19 tarjetas rojas. (Todas son diferentes)
¿De cuántas maneras se pueden extraer 10 tarjetas?

¿De cuántas maneras se pueden extraer 5 tarjetas negras y 5 rojas?

¿De cuántas maneras se pueden extraer todas las 10 tarjetas rojas?

5. Una baraja tiene 4 ases, 12 figuras y 36 cartas simples. ¿De cuántas maneras se puede conformar un juego de 5 cartas?

¿De cuántas maneras se puede conformar un juego de 5 cartas en el cual aparezcan 2 figuras y 3 cartas simples?

¿De cuántas maneras se puede conformar un juego de 5 cartas en el cual aparezcan 2 figuras, un as y 2 cartas simples?

TALLER No.9

Tema: **Monedas y otros**

FECHA: _____

Cuando se tira una moneda normal para que caiga sobre el piso se sabe que hay dos resultados posibles, que se distinguen por el grabado de la moneda que quede hacia arriba. Podemos llamarlos A y B. Si fueran iguales los grabados, la moneda no sería normal.

1. Piensa y resuelve el siguiente problema:

Supongamos que en una fila hay 3 niños, cada uno con una moneda normal, y que todos la tiran a la vez. Importando el orden de las monedas, ¿Cuántos resultados posibles pueden darse?

Haz un diagrama de árbol que indique los resultados en las tres monedas.

Escribe en orden todos los resultados posibles. (Por ejemplo: A,B,B es uno de ellos).

2. Repite el ejercicio anterior para el caso de 4 niños, cada uno con su moneda.

En los problemas 1 y 2, basta ver que se trata de aplicar el principio fundamental del conteo, multiplicando los posibles resultados de la primera moneda por los de la segunda, por los de la tercera,... y así, hasta terminar todas las monedas.

El caso de varias monedas a la vez es equivalente a una sola moneda que se tira repetidas veces. Los posibles resultados de tres monedas son los mismos que los de tres tiradas de una misma moneda. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

3. *Ahora piensa y resuelve el siguiente problema:*

Piensa o mira atentamente un dado común. Imagina que el juego consiste en tirar 3 veces el dado e ir anotando en orden el número de cada resultado, para leer finalmente el número de 3 dígitos que se formó.

¿Cuántos números diferentes se pueden formar con los resultados de las tres tiradas?
(Si lo piensas bien, verás que es similar al caso de la moneda, pero con más posibilidades para cada lugar)

4. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden escribir, incluidas todas las repeticiones, usando los dígitos 1,3,5,7,9 ?

¿Cuántos de los números anteriores son menores que 7.000? (Solamente se restringe el primer dígito)

¿Cuántos de los números anteriores son mayores que 5.000?

TALLER No.10

Tema: **Problemas de conteo**

FECHA: _____

1. En una fábrica de muñecos tienen 5 tipos de cabezas, 3 tipos de cuerpos, 8 tipos de vestidos y 6 tipos de zapatos. ¿Cuántos muñecos diferentes pueden armar?
2. En un hipódromo corren 6 caballos. De cuántas formas diferentes pueden llegar, si no hay empates?
3. El borde de un círculo se ha repartido en 27 espacios. Cada espacio se llena con una letra. De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las letras?
4. Los niños de primaria juegan a escribir todos los posibles arreglos que se puedan formar con 3 letras distintas del alfabeto. ¿Cuántos niños pueden escribir un arreglo cada uno antes de que se acaben las posibilidades?
5. Una niña tiene 13 muñecas. Cada día va a llevar al parque un grupo de 3. ¿Cuántos días puede salir con un grupo diferente de muñecas?

6. En un almacén venden 12 tipos diferentes de regalo para hombre y 23 tipos de regalo para mujer. Una persona necesita comprar 4 regalos para hombre y 6 para mujer. ¿Cuántas posibilidades tiene de escoger esos regalos?

7. ¿De cuántas maneras se puede elegir un juego de 5 cartas de una baraja de 52 cartas, de modo que 3 sean del mismo palo?

8. En una familia de 5 hijos, indicando con H un hijo varón y con M una hija, escribe todas las posibles formas como se puede distribuir el sexo de los hijos, en orden de edad.

9. ¿Cuántos números de 3 cifras que sean menores de 560 se pueden formar con los dígitos 4,5,7,9?

10. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden formar con las letras M, T, U, X, A, sabiendo que la A se repite 3 veces y la U se repite 2 veces?

TALLER No.11

Tema: **Noción de Probabilidad**

FECHA: _____

Un supermercado decide promocionar sus ventas y para ello pone a la entrada, junto a las cajas registradoras este aviso:

Cuando vaya a pagar, saque una bolita.
 Si saca una verde,
 su mercado es gratis.

1. Piensa y contesta:

¿Crees que las bolitas deben estar a la vista para que el comprador escoja? _____

Si tú eres el encargado de las bolitas,
¿en qué clase de recipiente las metes? _____

Para que todos tengan la misma oportunidad de ganarse el mercado, ¿Qué harás con las bolitas que los compradores vayan sacando?

Si el dueño desea que aproximadamente uno de cada veinte clientes se gane el mercado, ¿Cuántas bolitas y de qué colores te parece apropiado alistar?

Si un cliente que saca una bolita blanca, quiere el mercado gratis, ¿qué le contestarás?

¿Cómo se puede evitar este tipo de reclamos? _____

2. Discute con tus compañeros las respuestas a las preguntas anteriores.

3. Piensa y completa:

En una bolsa negra hay tres bolas verdes y siete amarillas. Sin mirar vas a sacar una. Tienes más chance de sacar una bola _____ que una _____

Si en la bolsa negra hay tres bolas verdes y tres amarillas y sacas una, entonces,

Estos problemas que has estado analizando tienen una característica especial, y es que el resultado no se puede saber con anterioridad. Son problemas en los que interviene algo que se llama **azar** y pensamos que en los resultados influye la suerte de cada uno.

Sacar una bola de una bolsa en donde hay varias de diferentes colores, extraer una carta de una baraja, lanzar un dado o una moneda al aire, son procesos cuyos resultados no se pueden predecir, porque *dependen del "azar"*.

Se llaman "**procesos aleatorios**" y sus resultados posibles pueden tener más o menos probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 1: Cuando se tira un dado común, pueden salir seis resultados diferentes, y cada uno tiene el mismo chance. Se dice que los seis resultados son igualmente probables, o que tienen igual "**probabilidad**".

Ejemplo 2: Cuando en una bolsa negra hay 3 bolas blancas y 6 bolas negras y se saca una sin mirar, la probabilidad de sacar una bola negra es el doble de la probabilidad de sacar una bola blanca.

Los resultados posibles de un proceso aleatorio se suelen llamar "**eventos**".

Así decimos que, en el caso de tirar un dado legal, el evento de que salga un 2, tiene la misma probabilidad que el evento de que salga un 6...

La probabilidad de un evento en un proceso aleatorio es un número que depende de cuántos sean los posibles resultados y de cuántos de ellos resulten favorables al evento en cuestión. Su valor es siempre un número no negativo menor o igual que 1, que corresponde al cociente:

$$\text{Probabilidad de un evento} = (\text{número de resultados favorables}) / (\text{número de resultados posibles})$$

En el caso del dado: Si apuesto al evento: "Que salga un 2", sé que hay 6 resultados igualmente posibles, pero solamente uno es favorable a mi apuesta. Entonces mi probabilidad de ganar es $1/6$

En el caso de la moneda: Si apuesto a "cara" tengo una probabilidad de ganar de $1/2$

En el caso de la extracción de una bola de la bolsa que tiene 3 blancas y 6 negras, si apuesto a "sacar una bola negra", tengo una probabilidad de ganar de $6/9 = 2/3$

La probabilidad de un evento en un proceso aleatorio es siempre un número que está entre 0 y 1.

Los eventos como obtener un 10 con una tirada de un dado, tienen probabilidad Cero porque no existen resultados favorables: $0/6 = 0$

Los eventos que suceden con seguridad tienen probabilidad 1. Por ejemplo, la probabilidad de que el resultado obtenido al tirar un dado legal sea menor que 8 es 1, porque todos los resultados posibles también son favorables: $6/6 = 1$

4. Busca información acerca de cinco juegos de azar. Calcula algunas probabilidades en ellos.

TALLER No.12

Tema: **Cálculo de Probabilidades**

FECHA: _____

El Cálculo de Probabilidades es una rama de la Matemática que se desarrolló en gran parte debido al auge de los Juegos de Azar.

Dentro del nivel inicial de estos talleres, solamente trataremos algunos problemas muy comunes, relacionados con tales juegos y otros procesos de la vida diaria.

Una probabilidad que en sí misma es un número no mayor que 1, se puede expresar **como un porcentaje**, multiplicando por 100 el número que se obtiene al efectuar la división entre el número de casos favorables al evento de que se trata, dividido por el número total de resultados posibles del proceso aleatorio.

Así, de acuerdo con los ejemplos que vimos en el taller anterior, se puede decir que: *la probabilidad de que al tirar un dado legal se obtenga un 2, es del 16.7%.*

También que: *la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda legal, es del 50%*

En todos los casos, el cálculo de la probabilidad de un evento, se hace con la aplicación simple de la fórmula tradicional. La cuestión, que puede tardar o complicarse un poco, es encontrar los números que intervienen en esa fórmula.

I. Analicemos algunos casos de un juego de cartas.

Supongamos, para todos los casos, que se juega con una baraja de 52 cartas distribuidas en 4 palos: A, B, C, D, cada uno de los cuales está formado por diez cartas numeradas del 1 al 10 y 3 figuras que se distinguen con las letras J, Q, K. El 1 es el As del palo respectivo.

El primer proceso será el de extraer una carta al azar, (significa que se hace sin mirar y habiendo barajado muy bien) y calcular las siguientes probabilidades:

1. Probabilidad de que la carta extraída sea el As del palo B
2. Probabilidad de que sea una figura
3. Probabilidad de que sea una carta numerada con número mayor que 3
4. Probabilidad de que la carta NO pertenezca al palo A

Entonces:

Para el caso 1: Puesto que solo hay uno favorable de los 52 posibles resultados,
 $P1 = 1/52 = 0.019$ que corresponde a un 1,9% de probabilidad.
(menos de 2 veces en 100: pequeña probabilidad)

Para el caso 2: El número de figuras es 12 (3 de cada palo, por 4 palos)
 $P2 = 12/52 = 0.23$, significa que con un 23% de probabilidad puede suceder. (23 veces en 100: probabilidad alta)

Para el caso 3: El número de cartas numeradas con 4,5,6,7,8,9,ó 10 es 28

$P_3 = 28/52 = 0.538$ o sea un 53.8%. (Más de la mitad de los casos. Es muy alta la probabilidad de que la carta extraída sea una de ellas)

Para el caso 4: El número de cartas que NO pertenecen al palo A es 39. (¿Por qué?)
 $P_4 = 39/52 = 0.75$, esto es el 75%. (Las tres cuartas partes de los casos son favorables, es una probabilidad muy alta.)

El segundo proceso será el de extraer un juego de 5 cartas de la baraja y encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

1. Que en el juego estén todos los ases
2. Que en el juego no aparezca ninguna figura
3. Que todas las cartas sean del mismo palo

Revisa tus talleres y tus conocimientos anteriores, piensa y contesta cada pregunta:
(No olvides aplicar el **Principio Fundamental del Conteo cuando haga falta**)

¿Cuántos juegos de 5 cartas se pueden extraer de la baraja? _____
(Recuerda: Combinaciones de 52 elementos tomados de a 5)

¿Cuántos juegos de 5 cartas tienen los 4 ases? _____
(¿De cuántas formas se puede elegir la quinta carta?)

Calcula la Probabilidad del evento 1: _____

¿Cuántos juegos de 5 cartas No tienen figuras? _____
(Combinaciones de ¿? cartas que NO son figuras tomadas de a 5)

Calcula la Probabilidad del evento 2: _____

¿Cuántos juegos de 5 cartas tienen todas sus cartas del mismo palo? _____
(Recuerda: 4 palos por Combinaciones de ¿? cartas de un mismo palo tomadas de a 5)

Calcula la Probabilidad del evento 3: _____

TALLER No.13

Tema: **Cálculo de Probabilidades**

FECHA: _____

Analicemos el caso de responder pruebas de opción múltiple con una sola respuesta verdadera. Estudia con atención el ejemplo del examen de Juan.

Problema 1:

Juan no sabe nada de Inglés y debe responder un examen en este idioma. Cada pregunta presenta 4 opciones de respuesta, una sola de las cuales es verdadera. ¿Qué probabilidad tiene Juan de elegir al azar la respuesta correcta a la primera pregunta?

Solución:

Es suficiente aplicar la conocida fórmula para calcular la probabilidad: El número de respuestas posibles es 4, y el número de respuestas favorables, es decir que sean verdaderas es 1.

Por tanto la probabilidad que tiene Juan de contestar, al azar, una sola pregunta de manera correcta es de $\frac{1}{4} = 0.25$, o sea que tiene un 25% de probabilidad de acertar.

Problema 2:

¿Cuál es la probabilidad de que elija mal la respuesta?

Aquí hay 3 casos a favor de contestar mal, de modo que la probabilidad es $\frac{3}{4} = 0.75$, o sea que tiene un 75% de probabilidad de contestar mal.

Es importante observar que en este caso de contestar al azar una pregunta, la suma de las probabilidades de contestar bien y de contestar mal es 1. Esto significa que forzosamente sucede una de las dos cosas: O contesta bien, o contesta mal.

Problema 3:

Si el examen de Juan tiene cinco preguntas del mismo tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste **una sola bien y todas las demás mal**, eligiendo las respuestas al azar?

Solución:

Para calcular el número de respuestas posibles del examen y el de respuestas favorables a nuestro evento de que vaya una correcta y 4 incorrectas, tenemos que aplicar el principio fundamental de conteo:

Número total de formas posibles de responder el examen = número de formas de contestar la primera pregunta, por, número de formas de contestar la segunda pregunta, por, número de formas de contestar la tercera, por número de formas de contestar la cuarta por número de formas de contestar la quinta pregunta, en total: $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1.024$

Número de respuestas favorables = número de formas de elegir la respuesta correcta por número de formas de elegir las respuestas incorrectas.

La respuesta correcta se puede elegir de 4 maneras.

Cada una de las respuestas incorrectas se puede elegir de 3 maneras. Como son 4 respuestas incorrectas que se deben elegir, el número total de casos favorables a que conteste solo una respuesta bien son: $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$

Por tanto, la probabilidad de que acierte solamente en una es: $324/1024 = 0.32$, o sea que tiene un 32% de probabilidad de obtener una calificación de 1 sobre 5.

Problema 4:

¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste todas las preguntas mal?

Solución:

El número de casos posibles sigue siendo 1.024.

El número de casos favorables es el número de casos de responder mal la primera por el número de casos de responder mal la segunda, por el de responder mal la tercera por el de responder mal la cuarta por el de responder mal la quinta = $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

Entonces, la probabilidad de que saque 0 en su examen es de $243/1.024 = 0.24$ o sea que tiene un 24% de probabilidad de contestar todo mal.

Problema 5:

¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste 2 preguntas correctamente y 3 equivocadamente?

Solución:

El número de casos favorables es igual al número de formas de elegir 2 preguntas que quedarán bien contestadas de las 5 preguntas del examen, multiplicado por el número de formas de elegir una respuesta equivocada en cada una de las 3 preguntas restantes: (revisar las combinaciones de 5 elementos tomados de a 2 = 10)

Número de casos favorables = $10 \times 3 \times 3 \times 3 = 270$

La probabilidad de que acierte exactamente 2 de 5 respuestas es: $270/1.024 = 0.26$. Con un 26% de probabilidad obtendrá una calificación de 2 sobre 5.

Problema 6:

¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste 3 preguntas correctamente y 2 equivocadamente?

Solución:

Similar al caso anterior: (Número de formas de elegir las 3 preguntas que quedan bien contestadas = combinaciones de 5 tomadas de a 3 = 10). Las otras dos tienen cada una 3 opciones incorrectas.

Número de casos favorables = $10 \times 3 \times 3 = 90$

Probabilidad de acertar en 3 preguntas exactamente = $90/1.024 = 0.09$. De modo que tiene un 9% de probabilidad de acertar al azar exactamente 3 de las 5 preguntas.

Problema 7:

¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste todas las preguntas bien?

Solución:

El número de respuestas posibles del examen sigue siendo 1.024.

El número de respuestas favorables es, por el principio fundamental del conteo igual a $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

De modo que la probabilidad de que por azar saque 5 sobre 5 es $1/1.024 = 0.00097$ que en porcentajes resulta ser 0.097%. Tiene menos de 0,1% de probabilidad de sacar bien en todas las preguntas.

Encuentra la probabilidad de que Juan conteste al azar 4 preguntas bien y 1 mal.

TALLER No.14

Tema: **Cálculo de Probabilidades**

FECHA: _____

El Juego de lanzar una moneda legal

Una moneda legal es una moneda que tiene diferentes grabados por los dos lados y que tiene una densidad uniforme para que no haya ninguna fuerza que la incline a caer por un lado con mayor facilidad que por el otro.

Supongamos que una moneda tiene por un lado una cara de Bolívar y por el otro un sello con un número que indica los pesos que representa. Se lanza y mientras está en el aire, se hacen apuestas: C significa que la cara quedará hacia arriba y la S significa que el sello con el número será el que quede hacia arriba.

1. Luis apuesta a cara: ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

Resultados posibles: 2; Resultados favorables a la apuesta de Luis: 1
Entonces: Probabilidad de ganar para Luis = $\frac{1}{2} = 0.5$, que es el 50%

2. Ahora el juego consiste en apostar antes de empezar, al número exacto de caras que se obtendrán en dos lanzamientos de la moneda.

Luis apuesta a 1 (Si caen 2 caras o ninguna, pierde) ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

Los resultados posibles son 4: C,C; C,S; S,C; S,S;

De estos resultados, 2 son favorables a la apuesta de Luis. De modo que tiene probabilidad $\frac{2}{4} = 0.5$ o sea 50% de probabilidad de ganar.

3. Si apuesta a 0, ¿qué probabilidad tiene de ganar? (Solo gana si caen N, N)
Evidentemente $\frac{1}{4} = 0.25$ que corresponde a un 25% de probabilidad de ganar.

4. En este mismo juego se aumenta a 3 el número de lanzamientos. Luis hace sus cuentas con anticipación para encontrar el número que mayor probabilidad tenga.

Entonces piensa así: el total de resultados posibles es $2 \times 2 \times 2 = 8$, porque en cada lanzamiento hay 2 opciones.

Calcula los **casos favorables a 1 sola cara**, pensando así: puede ser en la primera o la segunda o la tercera jugada. Por cada una de estas opciones las otras dos tienen que ser S, entonces solo son 3 casos favorables, lo que da una probabilidad de $\frac{3}{8} = 0.375$ o sea un 37.5% (P1)

Luego calcula los **casos favorables a 2 caras**, pensando así: puede ser en la primera y la segunda o en la primera y la tercera o en la segunda y la tercera jugada. Por cada

una de estas opciones la otra tiene que ser S, entonces son de nuevo 3 casos favorables, lo que da una probabilidad igual a la anterior o sea un 37.5% (P2)

Solamente hay **un caso favorable a 3 caras**, y **un caso favorable a 0 caras**, de modo que en estos dos, la probabilidad es $1/8 = 0.125$, que es el 12.5% ($P3 = P0$)

Luis quiere estar seguro y para confirmar sus cálculos, dibuja una tabla con todos los posibles resultados de los tres lanzamientos.

Primero	Segundo	Tercero
C	C	C
C	C	S
C	S	C
C	S	S
S	C	C
S	C	S
S	S	C
S	S	S

Al final se da cuenta de que las opciones más probables son 1 y 2 caras, pero también que, igualmente, son las mejores para los mismos números de sellos.

Ejercicios:

1. Suma las probabilidades de obtener respectivamente 0, 1, 2, ó 3 caras en el juego anterior

2.Cuál es la conclusión que se desprende del resultado de la suma que acabas de hacer?

—

3. Si el juego se extiende a 4 lanzamientos, calcula para Luis las probabilidades de ganar, apostando sucesivamente a 0, 1, 2, 3 ó 4 caras. (haz las operaciones por el reverso. Escribe aquí los resultados.

$P0 = \underline{\hspace{2cm}}$; $P1 = \underline{\hspace{2cm}}$; $P2 = \underline{\hspace{2cm}}$; $P3 = \underline{\hspace{2cm}}$; $P4 = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Construye la tabla para este caso, similar a la del caso de 3 lanzamientos. (Usa el reverso de la hoja)

¿Qué tan fácil es salir bien, por azar, en un examen de Verdadero y Falso?

Si en otro examen de Juan aparecen 5 cuestiones, cada una de las cuales tiene un único valor de verdad y Juan contesta al azar escribiendo V o F en cada punto.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que empiece contestando acertadamente el primer punto, antes de pasar a los otros?

7. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste todos los puntos mal?

8. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación de 1 sobre 5?

9. ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea 2 sobre 5?

10. ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea 3 sobre 5?

11. ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea 4 sobre 5?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea 5 sobre 5?

13. Compara con el examen del taller anterior y anota tus conclusiones por el reverso.

TALLER No.15

Tema: **Cálculo de Probabilidades**

FECHA: _____

El Juego de los Dados

Se trata de tirar dos dados sobre la mesa y apostar al número total de puntos que quedan hacia arriba.

Los números de puntos que pueden quedar hacia arriba son:
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Pero las posiciones de los dados son muchas más:

Supongamos que un dado es azul y el otro verde. Hagamos un cuadro de todas las posibles combinaciones de posiciones finales de uno y otro, y de la suma que muestran: (Completa con números pequeños las sumas que faltan)

A	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
V	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
S	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9		6	7	8	9			7	8	9			

El total de posiciones finales posibles de los dados es $6 \times 6 = 36$

Hagamos un cuadro para relacionar cada suma con el número de casos favorables a ella:

Suma	Casos favorables
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Ahora, calcula probabilidades:

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta al 10? _____
2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta al 7? _____

3. ¿Qué probabilidad de ganar tiene Luis si apuesta a que resulta un número menor que 6?

4. ¿Qué probabilidad de ganar tiene María si apuesta a que los dos dados muestran el mismo número de puntos?

5. ¿Qué probabilidad de ganar tiene el que apueste al 12?

6. Teresa apuesta a que el sale un número impar de puntos. ¿Qué probabilidad tiene de ganar?

7. Juan quiere apostar a que el número de puntos que sale es par. Luis dice que Juan y Teresa tienen la misma probabilidad de ganar. ¿Es o no es verdad lo que dice Luis? ¿Por qué?

8. José llega al final y apuesta a que resulta un número de puntos mayor que 9. ¿Qué probabilidad tiene de ganar?